

IL METODO DEL POTENZIALE COMPLESSO: UN APPROCCIO ALTERNATIVO ALL'ANALISI IDRODINAMICA

A cura di L. Colombo
loris.colombo@polimi.it

Indice

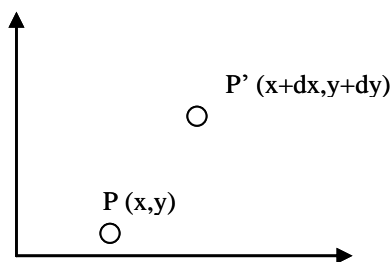
1	PREMESSA.....	2
2	TEORIA DEL POTENZIALE COMPLESSO	2
3	IL MOTO UNIFORME.....	3
4	POZZI E SORGENTI	3
5	I VORTICI COMPLESSI.....	4
6	SOVRAPPOSIZIONE DI MOTI SEMPLICI: APPLICAZIONI A CASI REALI	4
7	CONCLUSIONI	5
8	BIBLIOGRAFIA	6

1 PREMESSA

Le applicazioni della teoria dei moti piani irrotazionali e incompressibili retti dall'equazione armonica di Laplace $\nabla^2\phi=0$ possono coprire diversi campi di studio (dall'idraulica alla termodinamica e all'elettrica) in base alla diversa interpretazione di ϕ . In tutti questi campi è possibile far ricorso alla teoria del potenziale complesso. E' bene acquistare una certa familiarità con le funzioni analitiche di variabile complessa, che possono dare una volta comprese risultati assai soddisfacenti. Numerosi autori hanno utilizzato questo approccio sia per l'idrodinamica grafica sia per poter disegnare le linee equipotenziali e di flusso (FANELLI, 1971) che serve a supporto e talvolta a sostituzione dei modelli numerici, sia per lo studio di sistemi pozzo-pozzo sia sistemi per il contenimento degli inquinanti (STRACK, 1989; CHRIST & GOLTZ, 1999; C. SHAN, 1999; SKVORTSTOV & SUYUCHEVA, 2004).

2 TEORIA DEL POTENZIALE COMPLESSO

L'equazione armonica di Laplace nota a tutti ha delle limitazioni soprattutto per la bassa



maneggevolezza in termini di conti e risultati approssimativi per il reticolo idrico. Per tale motivo esistono dei metodi alternativi, tra i quali quello del metodo del potenziale complesso.

La legge di Darcy e l'equazione di diffusione stazionaria possono essere funzioni entrambi del potenziale di velocità definito come

$\phi = Kh$ con K la conduttività idraulica costante isotropa e uniforme.

$$V = -grad\phi$$

$$\nabla^2\phi = 0$$

Dal momento che per un moto piano e stazionario sono valide le condizioni di Cauchy-Riemann si può definire una funzione coniugata $f(\phi, \psi)$ mediante le seguenti

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Le precedenti sono definite analitiche, e per tale motivo è possibile definire una funzione analitica differenziabile con le medesime proprietà

$$\Gamma(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Se si tracciano quindi le curve di corrente tangenti in ogni punto alla direzione di V in quel punto, e si attribuisce ad ogni curva il valore Ψ , tale valore resta costante su tutta la curva. Si prendano a tal proposito due punti sul piano complesso e si calcoli il flusso attraverso la congiungente i due punti come $dQ = V \cdot n \cdot ds$ in cui le componenti di V sono espresse dal seguente sistema

$$\begin{cases} -K \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ -K \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \quad e$$

$$nds \begin{cases} -dy \\ dx \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del flusso si ottiene $dQ = \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = d\psi$ si ha che la variazione di portata lungo la linea congiungente i due punti è esattamente la differenza di flusso essendo un differenziale perfetto. Le linee quindi con ψ costante risultano le funzioni di velocità mentre quelle con ϕ sono le equipotenziali. Risulta anche dalla equazione stessa che l'integrale della velocità, espressa come complesso coniugato, fornisce il potenziale complesso ed è funzione della variabile complessa $z = x + iy$

Tale trasformazione permette il passaggio di un punto del piano z (x,y) ad un punto di un altro piano complesso $\Gamma(\phi,\Psi)$ o viceversa. Quando tale relazione è una funzione analitica del tipo $\Gamma = f(z)$ che permette di rappresentare il moto nel piano complesso si può considerare a tutti gli effetti una trasformazione conforme che permette di conservare gli angoli tra due linee nel piano z e nel piano trasformato. In particolare la trasformazione conforme permette di far corrispondere le equipotenziali e le linee di corrente nel di un moto definito nel piano z a quelle di uno stesso moto nel piano trasformato. Una delle trasformazioni più importanti nel campo dell'aerodinamica è quella di Joukowski.

Una delle proprietà più importanti del potenziale complesso risiede nel fatto di godere della proprietà additiva, il che vuol dire che un potenziale complesso può essere l'espressione della somma algebrico - vettoriale di più potenziali di moti semplici.

3 IL MOTO UNIFORME

Uno dei moti più semplici dell'idrodinamica è quello del moto uniforme dal momento che la velocità in modulo direzione e verso non cambia nello spazio. Il generico vettore della velocità \vec{v} inclinato di un angolo α rispetto l'asse delle x può essere scomposto nelle due componenti

$$\begin{cases} u = V \cos \alpha \\ v = V \sin \alpha \end{cases}$$

La velocità complessa risulterà la risultante delle due componenti in x,y ed in particolare corrisponderà, scritta in

forma euleriana, $\frac{d\Gamma}{dz} = Ve^{-i\alpha}$ che integrata

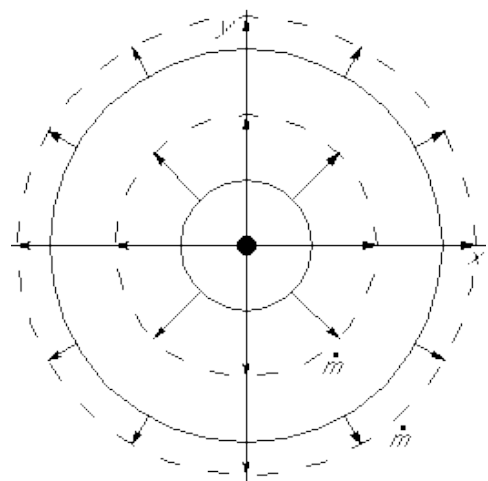
fornisce $\Gamma = zVe^{-i\alpha}$. Considerando l'angolo pari a 0, per semplicità ed intuitività, risulta scritto in coordinate x,y

un insieme di fasci di rette parallele all'asse x (equipotenziali) e parallele all'asse y (linee di corrente) così come rappresentate in

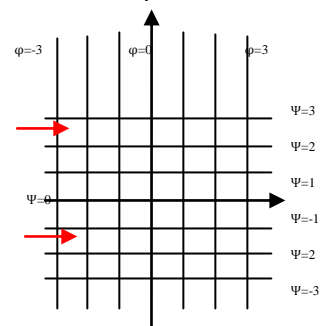
figura.

4 POZZI E SORGENTI

In matematica si possono considerare pozzi quelle entità che aspirano flusso mentre le sorgenti quelle che fanno scaturire del flusso. Per semplicità si consideri una sorgente nell'origine degli assi il cui fluido si propaga uniformemente secondo la seguente $Q = \frac{V}{2\pi r}$ e considerando la velocità complessa definita precedentemente si ottiene $d\Gamma = \frac{Qdz}{2\pi re^{i\alpha}}$ da cui per integrazione a variabili separabili risulta essere $\Gamma = \frac{Q}{2\pi} \ln z$



Ancora una volta, è possibile disegnare le linee equipotenziali e quelle di flusso



esplicitando la z in termini trigonometrici e dividendone accuratamente la parte reale da quella immaginaria risultando rispettivamente

$$\begin{cases} \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \\ \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \end{cases}$$

Le equipotenziali rappresentano cerchi concentrici mentre le particelle seguono un fascio di rette uscenti dall'origine e sempre perpendicolare alle equipotenziali

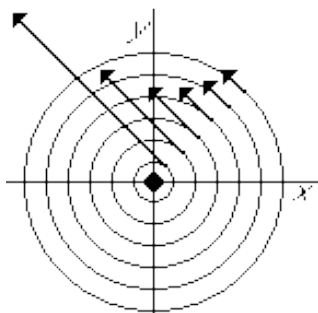
Per i pozzi vale la stessa equazione ma con un segno meno, dal momento che richiama flusso. Le particelle quindi non saranno uscenti dall'origine ma entranti in essa.

5 I VORTICI COMPLESSI

Se nell'origine degli assi si immagina un elemento vorticoso con un'area σ che ruota in senso antiorario con un angolo ω . Il teorema di Stokes assicura che

In cui V , richiamando la teoria magnetica e della corrente elettrica di Biot-Savart viene chiamata velocità indotta. In questo caso le componenti della velocità complessa saranno discordi rispetto ai casi precedenti, e si avrà un differenziale complesso pari a $\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{V}{i} e^{-i\theta}$ che integrandola sempre a variabili separabili si ottiene il potenziale complesso di un vortice

$$\Gamma = \frac{-i\lambda}{2\pi} \ln z$$

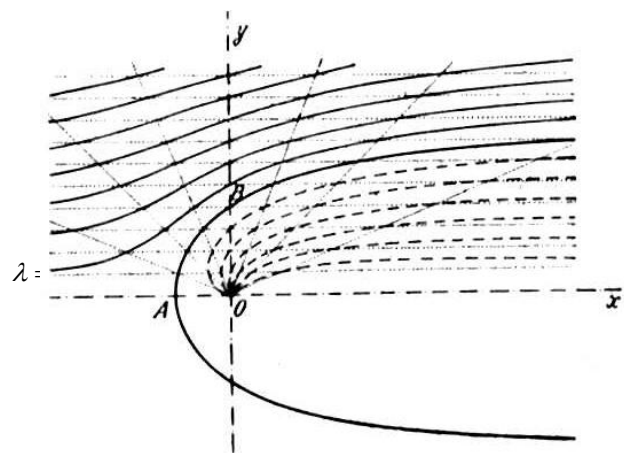


Applicando sempre l'espressione trigonometrica e suddividendola in parte

reale ed immaginaria si ottengono speculari rispetto alle precedenti: le equipotenziali sono semirette uscenti dall'origine mentre le linee di corrente sono ovviamente dei cerchi.

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \theta \\ \psi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln r \end{cases}$$

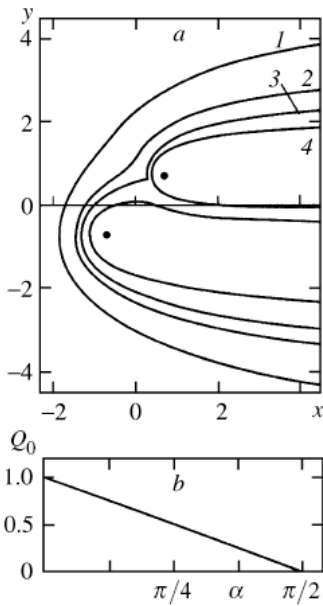
6 SOVRAPPOSIZIONE DI MOTI SEMPLICI: APPLICAZIONI A CASI REALI



Mediante la sovrapposizione dei moti semplici è possibile studiare e interpretare diverse situazioni reali, ad esempio (CHRIST AND GOLTZ, 2002) la progettazione di una barriera di pozzi a difesa di un sito da contaminanti. Gli Autori hanno sommato al moto semplice o scacchiera la funzione del pozzo secondo la seguente equazione

$$\Gamma = \phi + i\psi = -Vze^{-i\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi B} \ln(z - z_j) + C$$

In cui si ha la somma tra il flusso della falda e il pompaggio di un numero N di pozzi disposti nel piano complesso con una coordinata z_j . A partire da tale equazione è possibile mediante la sua differenziazione calcolare i punti di stagnazione o a flusso nullo della barriera, e avere quindi il tracciamento dello spartiacque piezometrico come si vede dalla figura qui sopra.



Un'altra soluzione è ad esempio quella di interpretare l'iterazione fra sorgenti e pozzi come proposto nella soluzione di SKVORTSOV & SUYUCHEVA, 2004

7 CONCLUSIONI

Il metodo del potenziale complesso permette assumendo ipotesi semplificate come flusso quasi stazionario in acquiferi confinati e molto spesso omogenei ed isotropi con spessore costante di descrivere il flusso nella vicinanza non solo di pozzi e sorgenti verticali (SHAN, 1999; CHRIST & GOLTZ, 2004) ma anche in pozzi orizzontali (ZHAN H, 1999) assimilabili a dreni. Tale metodo è applicabile per la linearità dell'equazione di Laplace (JAVANDEL ET AL, 1984) e permette di conoscere parametri idrogeologici per la progettazione di barriere di contenimento di inquinanti come punti di stagnazione, curva di cattura, spartiacque piezometrico, tempo di cattura delle particelle. Inoltre (FANELLI M., 1971) permette di disegnare mediante l'utilizzo delle funzioni reali ed immaginarie del potenziale le linee di corrente e le linee equipotenziali.

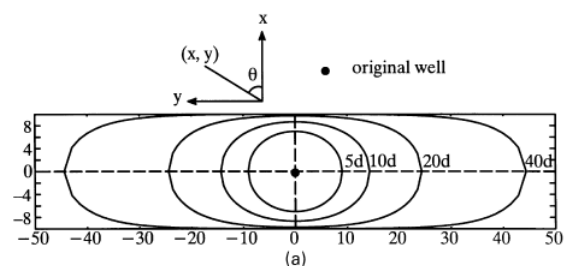
$$\Gamma = \phi + i\psi = -Vze^{-i\alpha} - \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - z_j) \pm \ln(z + z_j)]$$

Il cui potenziale è espressione della somma del flusso di falda e della somma di sorgenti e pozzi. Mediante tale soluzione è possibile risalire alla determinazione del flusso con un numero N di sorgenti e con diverse portate. Tale metodo permette di determinare il confine delle regioni protette dalla contaminazione mediante differenti configurazioni (posizione e portata) come riportato nella figura di fianco.

E' possibile ottenere (ZHAN H., 1999) soluzioni analitiche dei tempi di cattura, per pozzi orizzontali, delle particelle per acquiferi confinati di spessore b, isotropi a partire dal seguente potenziale complesso

$$\Gamma = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \ln(z - jb) - iq_0 z$$

Tale metodo permette non solo di calcolare il tempo ma anche di avere la possibilità di tracciare le curve ad esempio quando si è in presenza di un pozzo orizzontale al di sotto di un corso d'acqua.



8 BIBLIOGRAFIA

- CHRIST J.A, GOLTZ M.N., (2004), *Containment of groundwater contamination plumes: minimizing drawdown by aligning capture wells parallel to regional flow*, Journal of Hydrology 286, 52-68
- CHRIST J.A, GOLTZ M.N., (2002), *Hydraulic containment: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation*. Journal of Hydrology 262, 224-244
- CHRIST J.A, GOLTZ M.N., HUANG J. (1999), *Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies*. Journal of Contaminant Hydrology 37, 295-317
- FANELLI M. (1971), *Idrodinamica grafica* Journal of Contaminant Hydrology 37, 295-317
- SHAN C., (1999), *An analytical solution for the capture zone of two arbitrarily located wells*. Journal of Hydrology 222, 123-128
- SKVORTSOV & SUYUCHEVA, (2004), *Interaction between wells and a Groundwater Stream*, Fluid Dynamics, Vol. 40, n°4, 575-584
- STRACK, O.D.L., 1989. *Groundwater Mechanics*, First ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ
- JAVANDEL I. (1986), *Application of capture-zone type curves for aquifer cleanup*, Groundwater hydrology, contamination and remediation, Khanbilvardi R.M. ,Fillos J. Editors, Scientific Publications Co., Washington D.C
- ZHAN H., 1999 *Analytical study of capture time to a horizontal well*, Journal of Hydrology 46-54